Proceedings of IAM, V.13, N.2, 2024, pp.146-159
doi:10.30546/2225-0530.2024.13.2.012

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕХОДА К УСТАНОВИВШЕМУСЯ РЕЖИМУ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Ф.А. Алиев[1,2], Н.И. Велиева[1,3], Н.С. Гаджиева[1], М.М. Муталлимов[1,2,3]

[1]Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, Баку, Азербайджан
[2]Институт Информационных Технологий, Министерство Науки и Образования, Баку, Азербайджан
[3]Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com, nailavi@rambler.ru , nazile.m@mail.ru, mutallim@mail.ru

Абстракт. Для нахождения точки перехода времени регулятора от конца переходного процесса к началу установившегося режима приводится формула, где она теоретически обеспечивает совпадение результатов с любой точностью. Такой подход обеспечивает использование решения соответствующего дифференциального матричного уравнения Риккати через фундаментальные решения соответствующей Гамильтоновой системы, где ее производные равняются нулю в этой точке. Результаты иллюстрируются конкретными численными примерами.

Ключевые слова: ЛКГ задача, матричные алгебраические уравнения Риккати, приближенное решение, дифференциальное уравнение, фундаментальная матрица, установившийся режим.

AMS Subject Classification: 60G15, 93E11.

1. Введение

Как известно [6, 7, 10, 14, 19, 32], построение линейно квадратичной задачи (ЛКЗ) оптимального регулятора имеет как большое теоретическое [2, 12, 16, 17, 20, 23], так и практическое значение [1, 8, 9, 21]. Обычно такие регуляторы сначала должны обеспечивать движение на определенном интервале времени в переходном процессе [8, 13,15, 20], а, далее, после этого в определенной точке должны входить на установившейся режим. Отметим, что это задача рассматривалось многими исследователями [8, 15, 18, 20], однако нахождение такой точки перехода с одного режима на другой с приемлемой точностью не рассматривалась.

В данной работе, в отличие от [7, 10, 13, 15, 32], приводится алгоритм на базе [12, 15] нахождения такой точки перехода. Здесь не требуется вычисление производных решений уравнения Риккати, которые в этой точке должны равняться нулю [7, 10, 13]. Результаты будут иллюстрироваться на конкретном примере.

2. Постановка задачи.

Пусть движение объекта описывается следующей системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

где требуется найти такой линейный закон управлений

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

чтобы замкнутая система (1)+(2) была асимптотически устойчива и нижеследующий квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x'(t)Qx(t) + u'(t)Cu(t))dt \tag{3}$$

принял бы минимальное значение вдоль решений (1)+(2).

Здесь $x(t)$ – n-мерный фазовый вектор, $u(t)$ – m-мерный вектор управляющих воздействий, F – $n \times n, G$ – $n \times m$, $Q = Q' \geq 0 - n \times n, C = C' > 0 - m \times m$ - мерные постоянные матрицы. Здесь (F, G) - стабилизируемые пары, $(F', Q^{1/2})$ - детектируемые пары, K – искомая $m \times n$ - мерная матрица. Как отмечено в [7,8,10,13,15,29], существует такая точка t_*, при $t \geq t_*$, $K(t) \to K$, где

$$K(t) = -C^{-1}G'S(t), \tag{4}$$

а $S(t) = S'(t) \geq 0$ определяется из следующего матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{d}{dt}S(t) = -S(t)F - F'S(t) + S(t)GC^{-1}G'S(t) + Q \tag{5}$$

с начальными данными

$S(0) = S_0$, где $S_0 = S_0' \geq 0 - \; n \times n -$ мерная заданная матрица.

Как показано в [15] при $t \to \infty$ матричная функция $S(t)$ стремится к постоянной матрице $S = S' \geq 0$ так, чтобы, начиная с определенной точки $t = t_*$ выполняется $S(t) = S$ и

$$\left.\frac{dS(t)}{dt}\right|_{t=t_*} \approx 0. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) приводитя к следующему матричному алгебраическому уравнению Риккати

$$SF + F'S - SGC^{-1}G'S - Q = 0. \tag{7}$$

Точка t_*, удовлетворяющая условию (6) фактически обеспечивает постоянство $K(t) \approx K$ при $t > t_*$ в этом же интервале.

3. Определение точки времени перехода t_*.

Поскольку система (5) является нелинейной, нахождение t_* из (5) является сложной задачей. Поэтому, используем результаты аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) А.М. Летова [12].

Как известно [12, 24,30,31], решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа [2]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ -Q & -F' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0, x(\infty) = 0, \tag{8}$$

где $2n \times 2n -$ мерная матрица

$$H = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ -Q & -F' \end{bmatrix} \tag{9}$$

из (8) является зеркально симметричной, т.е. если λ_i собственные значения матрицы H, то противоположные значения - λ_i тоже являются собственными значениями той же матрицы H.

Допустим $\lambda_i < 0$ при $i = \overline{1,n}$. Тогда замкнутая система (1)-(2) имеет вид

$$\dot{x}(t) = (F + GK)x(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{10}$$

и ее матрица $F + GK$ имеет собственные значения λ_i, $i = \overline{1,n}$, а решение задачи Коши (10) при $t \to \infty$ имеет место $x(t) \to 0$.

Отметим, что точка перехода t_* от переходного режима к установившему, определяется соотношением (6), а (6) влияет на (9). Поэтому сам этот процесс зависит от собственных значений λ_i.

Теперь остановимся на задаче нахождения матрицы обратной связи [4] K из (10). Поскольку $K(t) \to K$ при $t \to \infty$ из (2) получим

$u = Kx,$

где искомая матрица K подлежит определению. Если найдем представление

$\lambda(t) = W\, x(t),$

тогда

$$K = -C^{-1}G`W \tag{11}$$

и такая K обеспечит асимптотическую устойчивость замкнутой системы (10) [2, 12].

Представим решение (8) в следующем виде

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \\ \dots \\ V_n^1 \\ U_1^1 \\ U_2^1 \\ \dots \\ U_n^1 \end{bmatrix} c_1 + \dots + e^{\lambda_n t}\begin{bmatrix} V_1^n \\ V_2^n \\ \dots \\ V_n^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ \dots \\ U_n^n \end{bmatrix} c_n + e^{\lambda_{n+1} t}\begin{bmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ \dots \\ V_n^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \dots \\ U_n^{n+1} \end{bmatrix} c_{n+1} + \dots + e^{\lambda_{2n} t}\begin{bmatrix} V_1^{2n} \\ V_2^{2n} \\ \dots \\ V_n^{2n} \\ U_1^{2n} \\ U_2^{2n} \\ \dots \\ U_n^{2n} \end{bmatrix} c_{2n}. \tag{12}$$

Здесь V_i^j, U_i^j собственные векторы системы (8), c_i постоянные, подлежащие определению.

Принимая обозначения

$$V = \begin{bmatrix} V_1^1 & \cdots & V_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n^1 & \cdots & V_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1^1 & \cdots & U_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & \cdots & U_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix},$$

и из (12) принимая $c_{n+1} = \dots = c_{2n} = 0$, тогда (12) примет следующей вид

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ U_1 \end{bmatrix} e^{\Lambda_+ t}\bar{C},$$

т.е.

$$\begin{aligned} x(t) &= V_1 e^{\Lambda_+ t}\bar{C}, \\ \lambda(t) &= U_1 e^{\Lambda_+ t}\bar{C}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\Lambda_+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Из первого уравнения (13) взяв $e^{\Lambda_+ t}\bar{C} = V_1^{-1}x(t)$ и подставив во второе уравнение (13), получим

$$\lambda(t) = U_1 V_1^{-1} x(t) = W\, x(t). \tag{14}$$

Такое представление (14) обеспечивает асимптотическую устойчивость (10).

Действительно, пусть
$$\tilde{\lambda} = \min_i \{|\lambda_i|\}, \tag{15}$$
где λ_i действительные и различные числа. Тогда из (10)
$$x(t) = e^{(F+GK)t}x(0) = T^{-1}e^{\Lambda_+ t}\,Tx(0). \tag{16}$$
Обозначим
$$z(t) = Tx(t), \tilde{\lambda} = \lambda_l, \quad 0 < l < n. \tag{17}$$
Тогда
$$z_l(t) = e^{\lambda_l t}z_l(0) \tag{18}$$
и пусть точка t_* такая, что $z_l(t_*) = \varepsilon$, где ε достаточно малое положительное число.
Таким образом в точке t_* из (18) получим
$e^{\lambda_l t_*}z_l(0) = \varepsilon$.
Отсюда имеем
$$t_* = \frac{1}{|\tilde{\lambda}|}\ln\frac{\varepsilon}{z_l(0)}. \tag{19}$$
Аналогичные формулы можно получить для случаев, когда собственные значения повторяющиеся и комплексные, тогда диагональные матрицы Λ_+ будут заменены Жордановыми матрицами или же в диагонали будут квадратичные двумерные матрицы соответственно.

После нахождения t_* из (19) проверяется условие (6), при выполнении которого условие вычисления прекращается. Отметим что, $S(t)$ находятся из (5). Однако, нахождение решения $S(t)$ и, тем более $\frac{d}{dt}S(t)$ из уравнения (5), очень сложно. Поэтому, используя соотношение (8), попытаемся найти $S(t)$ через фундаментальные матрицы.

4. Нахождение $S(t)$ через фундаментальную матрицу уравнений (8)

Пусть из (8),(9)
$$e^{Ht} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t,0)\phi_{12}(t,0) \\ \phi_{21}(t,0)\phi_{22}(t,0) \end{bmatrix}, \tag{20}$$
что является фундаментальной матрицей системы (8).
Тогда решение матричных дифференциальных уравнений Риккати имеет вид [1,2,11,23]
$$S(t) = [\phi_{21}(t,0) + \phi_{22}(t,0)S(0)][\phi_{11}(t,0) + \phi_{12}(t,0)S(0)]^{-1}, \tag{21}$$
где $S(0)$ - заданная начальная матрица уравнения (5).
Поскольку в точках $t > t_*$ дифференциальное уравнение (5) превращается в алгебраическое уравнение Риккати (7), то в точке t_* удовлетворяется условие (6), т.е. норма производной $S(t)$ близка к малому параметру. Как известно [3,7,10,13,15] при $t > t_*$-$S(t) \to S$ при любых начальных условиях $S(0)$.

Для простоты в (21) примем $S(0) = 0$ и решение $S(t)$ из (21) при существовании ${\phi_{11}}^{-1}(t,0)$ переходит к виду

$$S(t) = \phi_{21}(t,0){\phi_{11}}^{-1}(t,0) \tag{22}$$

Для проверки постоянства $S(t)$ при $t > t_*$ разбиваем близкие окрестности $(t_* - \delta, t_* + \delta)$ на интервалы $t_* - \delta < t_1 < t_2 < \cdots t_* < t_{i+1} < \cdots < t_* + \delta$ с шагом $\Delta = t_{i+1} - t_i$ и проверяем условия

$$\|S(t_{i+1}) - S(t_i)\| < \varepsilon \tag{23}$$

или же условие (6) в следующем виде

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta} \approx 0. \tag{24}$$

Если одно из условий (23), (24) удовлетворяется, можно принимать t_* границей переходного процесса с установившемся режимом.

Таким образом, можно предложить следующий вычислительный алгоритм.

Алгоритм:

1. Формируются матрицы F, G, Q, C в задаче (1)-(3);
2. Формируется матрица Гамильтона (9);
3. Вычисляется матрица Λ из (13);
4. Находятся минимальные собственные значения $\tilde{\lambda}$ из (19);
5. Выбирается малый параметр ε и по формуле (19) вычисляются значение точки t_*
6. Для вычисленного значения t_* находится значение $S(t)$ на интервале $(0,\ 2t_*)$ и проверяются условия (23) или (24).

5. Задача минимизации отклонения амплитуд колебания решения замкнутой системы.

Интересным является поведение $x(t)$ на интервале $(0,t_*)$ в зависимости от начальных значений матриц $S(0)$. С определенной точностью можем утверждать, что $S(t_*) = S$.

В линейно квадратичной задачи оптимизации (1)-(3) заменим функционал (3) на нижеследующий вид

$$J = \frac{1}{2}x'(t_*)Sx(t_*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_*}\left(x'Qx + u'Cu\right)dt,$$

где $S \geq 0$ является решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$SF + F'S - SGC^{-1}G'S + Q = 0.$$

Решив матричное дифференциальное уравнение (5) с конечным условием $S(t_*) = S$, можем найти $S(0)$, при вычислении $S(t)$ через (21) , может достигнуть $S(t_*) \approx S$.

Обычно на интервале $(0, t_*)$ матрица обратной связи K в переходном режиме дает определенное колебание к решению $x(t)$ замкнутой системы. Для уменьшения амплитуды колебаний на интервале $(0, t_*)$ поставим другую задачу, т.е. выберем матрицу K так, чтобы норма $\|x(t)\|$ была минимальной, т.е. минимизируем функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t*} x'(t) L\, x(t) dt \tag{25}$$

по траектории уравнений (10), где L симметричная, положительно определенная матрица. В таком случае

$$\min_K J = Sp\,(S(K), X_0), \tag{26}$$

где $S(K)$ удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Ляпунова (МАУЛ)

$$(F + GK)'S(K) + S(K)(F + GK) = -L.$$

С помощью градиентного метода [22, 25-28,33] можно найти K_*, который минимизирует функционал (26).

6. Численная реализация.

В качестве примера из [11] возьмем пример3.6.

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, C=1, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Используя вышеизложенный алгоритм получили следующее значение для t_* и S

$t_* = 5.3176$; $S = \begin{bmatrix} 1.7321 & 1 \\ 1 & 1.7321 \end{bmatrix}$.

По формуле (4) вычисляется K. Далее, решаем задачу Коши для замкнутой системы (10) и находим решение $x(t)$.

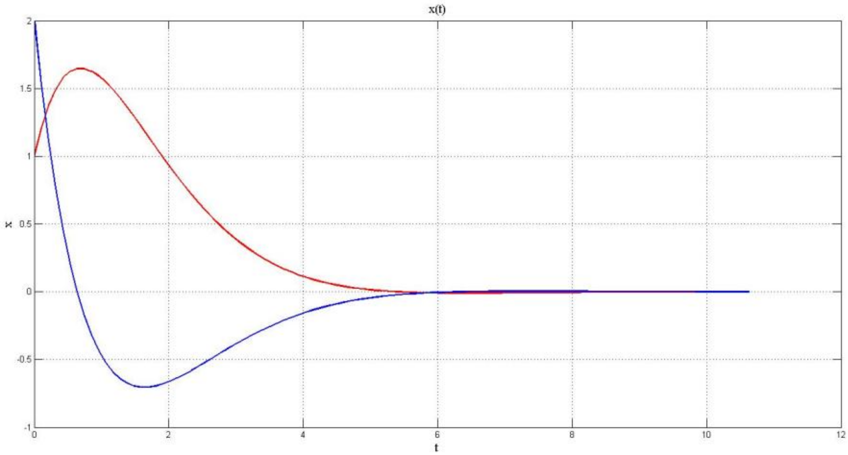

Рис1. Зависимость фазового вектора $x(t)$ от времени.

7. Заключение.

Приводится формула для нахождения точки перехода времени регулятора от конца переходного процесса к началу установившегося режима. Используя фундаментальные решения соответствующей Гамильтоновой системы, приводится решение соответствующего дифференциального матричного уравнения Риккати. Далее, минимизируется амплитуда колебаний решения замкнутой системы на интервале $(0, t_*)$. Результаты иллюстрируются конкретными численными примерами.

Литература

1. Алиев Ф.А. Методы Решения Прикладных Задач Оптимизации Динамических Систем, Баку: Елм, 1989, 320 с.
2. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Оптимизация и Метод Пространства Состояний в Задаче Синтеза Оптимальных Регуляторов, Баку, Элм, (1994), 274 с.
3. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Оптимизация Линейных Инвариантных Во Времени Систем Управления, Киев: Наукова думка, (1978), 327 с.
4. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Особые случаи в задачах оптимизации стационарных линейных систем, функционирующих по принципу обратной связи, Прикл. механика, V.39, (2003).
5. Андреев Ю.Н. Управление Конечномерными Линейными Объектами, Москва: Наука, (1976), 424с.

6. Беллман Р. Динамическое Программирование, М., (1960), 400с.
7. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная Теория Оптимального правления, М: Мир, (1972).
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная Теория Оптимальных Процессов, Москва: Наука, (1971), 508 с.
9. Гаджиева Н.С. Вычислительный алгоритм решения дискретной задачи линейно-квадратичной оптимизации с ограничением в виде равенств на управление методом прогонки, Proceedings of IAM, V.13, N.1, (2023), pp.108-118.
10. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные Оптимальные Системы Управления, М.: Мир, (1977), 656 с.
11. Ларин В.Б. Управление Шагающим Аппаратом, Киев, Наук, Думка, (1980), 168 с.
12. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов, Автомат. и телемех., V.21, N.4, (1960), pp.436–441.
13. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин, Монография, LAMBERT, Academic Publishing Gmbh&Co, KG Germany, (2012), 164 p.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая Теория Оптимальных Процессов, Москва, Наука, (1983), 393 с.
15. Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах, Автоматика и телемеханика, V.24, N.6, (1963), pp.738-743.
16. Aliev F., Hajiyeva N., Velieva N., Mutallimov M., Tagiyev R. Constructing Optimal Regulator for Discrete Linear Quadratic Optimization Problem with Constraints on Control Action, Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.194-197.
17. Aliev F., Mutallimov M., Hajiyeva N., Velieva N., Abbasov A., Ismayilov N.A. Optimal Regulators for Multipoint Problems of Dynamic Systems .Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.332-335.
18. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Design of an optimal stationary controller, Izv. AN SSSR, Tekhnkibernetika, (1985), pp.143-151.
19. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Namazov A.A. Algorithm for solution of linear quadratic optimization problem with constraint in the form of equalities on control, Applied and Computational Mathematics, V.23, N.3, (2024), pp.404-414.
20. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control System, London: Gordon and Breach, (1998), 270 p.

21. Aliev F.A., Larin V.B. On Control of the Spectrum of Linear Mechanical Systems, International Applied Mechanics, V.55, N.6, (2019), pp.654-659.
22. Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Mirsaabov S.M. Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of IAM, V.10, N.2, (2021), pp.96-112.
23. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410p.
24. Aliev F.A. Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Élm, Baku, (1989).
25. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh. Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.1, (2022), pp.81-83.
26. Aliev F.A., Sushchenko O.A., Mutallimov M.M., Javadov N.G., Mammadov F.F., Maharramov R.R. Algorithm for quadcopter motion stabilization taking into account data of inertial navigation system, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.14, N.2, (2023), pp.278-289.
27. Aliev F.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine, V.51(30), (2018), pp.323-330.
28. Aliev F.A., Hajiyeva N.S. Discrete linear quadratic optimization problem with constraints in the form of equalities on control action, TWMS J. App. and Eng. Math., V.14, N.4, (2024), pp.1466-1472.
29. Aliev F.A., Larin V.B. Stabilization Problems for a System with Output Feedback, Int. Appl. Mech., V.47, N.3, (2011), pp.3–49.
30. Hajiyeva N. Sweep Method for Defining of Discrete Linear Quadratic Optimization Problem with Constraint in the Form of Equalities on Control, Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.328-331.
31. Hajiyeva N.S., Mutallimov M.M. Construction of optimal program trajectories and controls for vertical motion of a quadrocopter, Proceedings of IAM, V.12, N.2, (2023), pp.166-180.
32. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng., V.83, N.1, (1961), pp.95–108.
33. Safarova N.A., Velieva N.I. Iterative algorithms to the solution of the discrete optimal regulator problem, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, V.57(105), N.4, (2014), pp.427-436.

ALGORITHM FOR DETERMINING THE TRANSITION POINT TO STEADY-STATE REGIME FOR A CONTINUOUS LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROLLER PROBLEM

F.A. Aliev[1,2], N.I. Velieva[1,3], N.S. Hajiyeva[1], M.M. Mutallimov[1,2,3]

[1]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Information Technologies, Ministry of Science and Education, Baku, Azerbaijan
[3]Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
e-mail: f_aliev@yahoo.com, nailavi@rambler.ru , nazile.m@mail.ru, mutallim@mail.ru

Abstract

To find the transition point of the controller time from the end of the transient process to the beginning of the steady state, a formula is given, where it theoretically ensures the coincidence of the results to any accuracy. This approach ensures the use of the solution of the corresponding differential matrix Riccati equation through the fundamental solutions of the corresponding Hamiltonian system, where its derivatives are equal to zero at this point. The results are illustrated with specific numerical examples.

Keywords: Nonlinear equations and inequalities, global solutions.

References

1. Aliev F.A. Metody Reshenija Prikladnyh Zadach Optimizacii Dinamicheskih Sistem, Baku: Elm, 1989, 320 s (Aliev F.A. Methods of Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Baku: Elm, 1989, 320 p..)
2. Aliev F.A., Bordjug B.A., Larin V.B., Optimizacija i Metod Prostranstva Sostojanij v Zadache Sinteza Optimal'nyh Reguljatorov, Baku, Jelm, (1994), 274 s (Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Optimization and the State Space Method in the Problem of Synthesis of Optimal Regulators, Baku, Elm, (1994), 274 p.).
3. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suncev V.N. Optimizacija Linejnyh Invariantnyh Vo Vremeni Sistem Upravlenija, Kiev: Naukova dumka, (1978), 327 s (Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.N. Optimization of Linear Time-Invariant Control Systems, Kyiv: Naukova Dumka, (1978), 327 pp.)
4. Aliev F.A., Larin V.B. Osobye sluchai v zadachah optimizacii stacionarnyh linejnyh sistem, funkcionirujushhih po principu obratnoj svjazi, Prikl. mehanika, V.39, (2003) (Aliev F.A., Larin V.B. Special cases in optimization problems of stationary linear systems operating on the feedback principle, Prikl. Mekhanika, V.39, (2003)).

5. Andreev Ju.N. Upravlenie Konechnomernymi Linejnymi Ob#ektami, Moskva: Nauka, (1976), 424s (Andreev Yu.N. Control of Finite-Dimensional Linear Objects, Moscow: Nauka, (1976), 424 p.).
6. Bellman R. Dinamicheskoe Programmirovanie, M., (1960), 400s.(Bellman R. Dynamic Programming, M., (1960), 400 p.)
7. Brajson A., Ho Ju Shi. Prikladnaja Teorija Optimal'nogo upravlenija , M: Mir, (1972).(Bryson A., Ho Yu Shi. Applied Theory of Optimal Control, M: Mir, (1972).)
8. Gabasov R., Kirillova F.M. Kachestvennaja Teorija Optimal'nyh Processov, Moskva: Nauka, (1971), 508 c (Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная Теория Оптимальных Процессов, Москва: Наука, (1971), 508 с).
9. Gadzhieva N.S. Vychislitel'nyj algoritm reshenija diskretnoj zadachi linejno-kvadratichnoj optimizacii s ogranicheniem v vide ravenstv na upravlenie metodom progonki, Proceedings of IAM, V.13, N.1, (2023), pp.108-118. (Gadzhieva N.S. Computational algorithm for solving a discrete linear-quadratic optimization problem with a constraint in the form of equalities on control using the sweep method, Proceedings of IAM, V.13, N.1, (2023), pp.108-118.)
10. Kvakernaak H., Sivan R. Linejnye Optimal'nye Sistemy Upravlenija, M.: Mir, (1977), 656 s.(Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems, Moscow: Mir, (1977), 656 p.)

~~11.~~ Larin V.B. Upravlenie Shagajushhim Apparatom, Kiev, Nauk, Dumka, (1980), 168 s (Larin V.B. Control of the Walking Apparatus, Kyiv, Nauk, Dumka, (1980), 168 p).

12. Letov A.M. Analiticheskoe konstruirovanie reguljatorov, Avtomat. i telemeh., V.21, N.4, (1960), pp.436–441 (Letov A.M. Analytical design of regulators, Autom. and Telemekh., V.21, N.4, (1960), pp.436–441).
13. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metody reshenija zadach optimizacii pri jekspluatacii neftjanyh skvazhin, Monografija, LAMBERT, Academic Publishing Gmbh&Co, KG Germany, (2012), 164 p(Mutallimov M.M., Aliev F.A. Methods for solving optimization problems during operation of oil wells, Monograph, LAMBERT, Academic Publishing Gmbh&Co, KG Germany, (2012), 164 p.).
14. Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. Matematicheskaja Teorija Optimal'nyh Processov, Moskva, Nauka, (1983), 393 s (Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical Theory of Optimal Processes, Moscow, Nauka, (1983), 393 p.).
15. Repin Ju.M., Tret'jakov V.E. Reshenie zadachi ob analiticheskom konstruirovanii reguljatora na modelirujushhih ustrojstvah, Avtomatika i telemehanika, V.24, N.6, (1963), pp.738-743. (Repin Yu.M., Tretyakov V.E. Solution of the problem of analytical design of a regulator on

modeling devices, Automation and Telemechanics, V.24, N.6, (1963), pp.738-743.)

16. Aliev F., Hajiyeva N., Velieva N., Mutallimov M., Tagiyev R. Constructing Optimal Regulator for Discrete Linear Quadratic Optimization Problem with Constraints on Control Action, Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.194-197.
17. Aliev F., Mutallimov M., Hajiyeva N., Velieva N., Abbasov A., Ismayilov N.A. Optimal Regulators for Multipoint Problems of Dynamic Systems .Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.332-335.
18. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Design of an optimal stationary controller, Izv. AN SSSR, Tekhnkibernetika, (1985), pp.143-151.
19. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Namazov A.A. Algorithm for solution of linear quadratic optimization problem with constraint in the form of equalities on control, Applied and Computational Mathematics, V.23, N.3, (2024), pp.404-414.
20. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control System, London: Gordon and Breach, (1998), 270 p.
21. Aliev F.A., Larin V.B. On Control of the Spectrum of Linear Mechanical Systems, International Applied Mechanics, V.55, N.6, (2019), pp.654-659.
22. Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Mirsaabov S.M. Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of IAM, V.10, N.2, (2021), pp.96-112.
23. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410p.
24. Aliev F.A. Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Élm, Baku, (1989).
25. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh. Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.1, (2022), pp.81-83.
26. Aliev F.A., Sushchenko O.A., Mutallimov M.M., Javadov N.G., Mammadov F.F., Maharramov R.R. Algorithm for quadcopter motion stabilization taking into account data of inertial navigation system, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.14, N.2, (2023), pp.278-289.
27. Aliev F.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine, V.51(30), (2018), pp.323-330.
28. Aliev F.A., Hajiyeva N.S. Discrete linear quadratic optimization problem with constraints in the form of equalities on control action, TWMS J. App. and Eng. Math., V.14, N.4, (2024), pp.1466-1472.

29. Aliev F.A., Larin V.B. Stabilization Problems for a System with Output Feedback, Int. Appl. Mech., V.47, N.3, (2011), pp.3–49.
30. Hajiyeva N. Sweep Method for Defining of Discrete Linear Quadratic Optimization Problem with Constraint in the Form of Equalities on Control, Proceedings of the 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2024), pp.328-331.
31. Hajiyeva N.S., Mutallimov M.M. Construction of optimal program trajectories and controls for vertical motion of a quadrocopter, Proceedings of IAM, V.12, N.2, (2023), pp.166-180.
32. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng., V.83, N.1, (1961), pp.95–108.
33. Safarova N.A., Velieva N.I. Iterative algorithms to the solution of the discrete optimal regulator problem, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, V.57(105), N.4, (2014), pp.427-436.